

APÉNDICE A

A. RADIOMETRÍA Y FORMACIÓN DE IMÁGENES, FUNCIÓN DE REFLECTANCIA Y REFLECTANCIA DE LAS SUPERFICIES

La captura de imágenes viene determinada, además de por la geometría de las cámaras, por la relación *radiométrica* entre el mundo y su imagen. Las imágenes recibidas por las personas en sus actividades visuales diarias provienen normalmente de la luz reflejada por los objetos. La naturaleza básica de una imagen puede caracterizarse por dos componentes: (1) la cantidad de luz incidente en la escena, que está siendo observada y que proviene de una fuente de luz y (2) la cantidad de luz reflejada por los objetos de la escena. Se denominan componentes de *iluminación* y *reflectancia*. Aunque ambas se conocen informalmente como brillo, sus unidades de medida son ligeramente diferentes como se verá posteriormente. En Horn (1986) y Nalwa (1993) se pueden encontrar estos conceptos.

A.1 RADIOMETRÍA Y FORMACIÓN DE IMÁGENES

La cantidad de luz que incide en una superficie o *iluminación* se mide como la potencia por unidad de área (W.m^{-2}) incidente en la superficie. La cantidad de luz emitida por la superficie en cualquier dirección se denomina *reflectancia*, que se mide como potencia por unidad de área escorzada en la dirección de radiación y por unidad de ángulo sólido o *stereoradián* ($\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$). Como se ilustra en la figura A.1 el área escorzada de una superficie en cualquier dirección es el área de la superficie proyectada

en la dirección bajo consideración; para una superficie plana, el área escorzada es simplemente el producto del área de la superficie con el coseno del ángulo entre la superficie normal y la dirección de proyección.

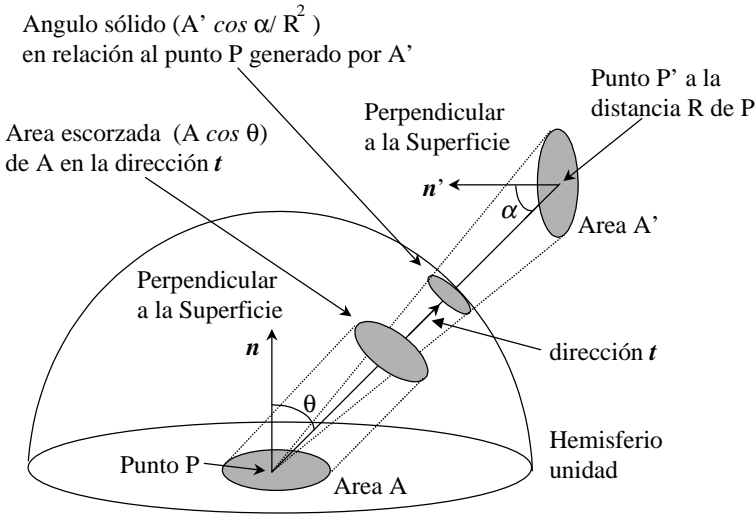


Figura A.1 Ángulo sólido y área escorzada

Como también se ilustra en la figura A.1 el *ángulo sólido*, en estereoradianes, de un cono con vértice en un punto P es el área generada por el cono sobre una esfera unidad centrada en el vértice del cono; por tanto el ángulo sólido generado por una pequeña superficie A' en un punto P' a la distancia R de P es el área escorzada en la dirección de P' dividida por la distancia al cuadrado R^2 ,

$$\Omega = \frac{A' \cos \alpha}{R^2} \quad (A.1)$$

En la figura A.1 la iluminación E de la superficie localizada en el punto P es la razón de los dos términos siguientes: (1) la potencia total de la luz incidente en la superficie en P dentro de alguna pequeña superficie elemental δA y (2) el área δA . La reflectancia de esta superficie en el punto P en la dirección t es la razón de los dos términos siguientes: (1) la potencia total de la luz emitida por una pequeña superficie elemental δA en P dentro de un pequeño cono de direcciones sobre t y (2) el producto del área escorzada de la superficie δA en P en la dirección t con el ángulo sólido del cono de direcciones alrededor de t .

Considerar una lente delgada ideal y asumir que la distancia del objeto a la lente u es mucho mayor que la longitud focal f de la lente, y que el plano de la imagen está a una distancia f de la lente de forma que las imágenes están perfectamente enfocadas. Además considerar que la distancia u del objeto es mucho mayor que el diámetro d de la apertura circular de la lente. Con ello, la dirección de radiación de un punto objeto a cualquier punto de la lente será aproximadamente constante. Denotemos el ángulo entre esta dirección y el eje óptico de la lente por α , ver figura A.2.

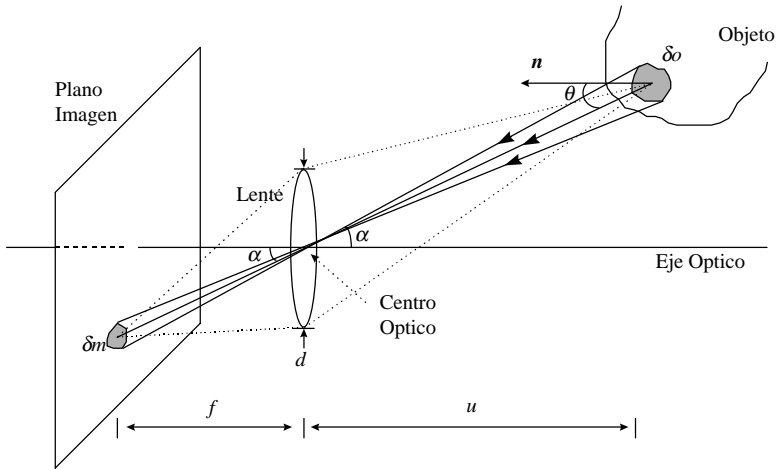


Figura A.2 Radiometría de formación de una imagen a través de una lente delgada

En relación a la figura A.2 sea L la reflectancia en la dirección de la lente de una superficie de un objeto infinitesimal con área δo y n un vector perpendicular a la superficie; sea δm el área de la imagen de dicha superficie; n forma un ángulo θ con la dirección definida por el área infinitesimal del objeto y el centro óptico de la lente. Se sigue de la definición de reflectancia que la potencia δP capturada por la lente a partir de la superficie δo , asumiendo una lente sin pérdidas, es el producto de los tres términos siguientes,

- 1) La reflectancia L de la superficie infinitesimal en la dirección de la lente.
- 2) El área infinitesimal escorzada ($\delta o \cos \theta$) en la dirección de la lente.
- 3) El ángulo sólido generado por la apertura de la lente en la superficie del objeto infinitesimal.

El ángulo sólido generado por la apertura de la lente en la superficie infinitesimal resulta ser la razón del área escorzada de la apertura en la dirección de la superficie

elemental al cuadrado de la distancia de la apertura a partir de dicha área infinitesimal; es decir, es la razón de $\pi(d/2)^2 \cos\alpha$ a $(u/\cos\alpha)^2$. Por tanto, llegamos a la siguiente expresión,

$$\delta P = L (\delta o \cos\theta) \frac{\pi(d/2)^2 \cos\alpha}{(u/\cos\alpha)^2} \quad (\text{A.2})$$

Como $\delta o \cos\theta$ es el área escorzada de δo en la dirección de la lente y $(u/\cos\alpha)$ es la distancia de δo desde la lente, $(\delta o \cos\theta)/(u/\cos\alpha)^2$ es simplemente el ángulo sólido generado por la superficie elemental δo en el centro óptico de la lente. Pero este ángulo sólido, como se muestra en la figura A.2, es el mismo que el ángulo sólido generado por la superficie elemental δm en el centro óptico de la lente; en definitiva, es lo mismo que $(\delta m \cos\alpha)/(f/\cos\alpha)^2$. Sustituyendo se obtiene,

$$\delta P = L \pi(d/2)^2 \cos\alpha \frac{(\delta m \cos\alpha)}{(f/\cos\alpha)^2} \quad (\text{A.3})$$

Reagrupando términos y denotando la intensidad o brillo de la imagen por I , llegamos a la siguiente expresión,

$$I = \frac{\delta P}{\delta m} = L \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{f} \right)^2 \cos^4 \alpha \quad (\text{A.4})$$

Esta ecuación, de vital importancia, es denominada la *relación radiométrica fundamental* entre la *reflectancia* de la escena y la *intensidad* o *brillo* de la imagen de dicha escena (no confundir iluminación de la imagen con iluminación de la escena, que se verá más adelante). Recordemos que f es la longitud focal de la lente, d es el diámetro de la apertura circular de la lente y α es el ángulo entre el eje óptico de la lente y la dirección desde la lente hacia el punto del objeto cuya imagen está siendo capturada. La razón (f/d) , esto es, la razón entre la longitud focal y el diámetro de la apertura circular de la lente, se denomina el *f-number* de la lente.

La relación radiométrica fundamental nos dice que la iluminación de la imagen es proporcional a la reflectancia de la escena. El factor de proporcionalidad es el producto de $(\pi/4)$, una constante, $(d/f)^2$, el cuadrado de la inversa del *f-number*, y $\cos^4 \alpha$, donde α es el ángulo entre el eje óptico de la lente y la dirección a partir de la lente hacia el punto del objeto que está siendo proyectado. La iluminación es también proporcional al área de la apertura de la lente $(\pi d^2/4)$, por tanto es lógico que la cantidad de luz capturada por la lente desde un punto del objeto distante sea

proporcional al área de apertura de la lente. La dependencia de la iluminación de la imagen del factor $(1/f)^2$ se explica fácilmente: la dimensión de la imagen formada es proporcional a la distancia de esta imagen desde la lente, y para objetos que están muy lejos, esta distancia es la longitud focal f de la lente; se sigue que el área de la imagen es proporcional a f^2 y por tanto la iluminación es proporcional a $(1/f)^2$. Tanto el área de la apertura como la longitud focal de la lente sobre cualquier imagen son constantes. Por contra, el término $\cos^4 \alpha$, cuyo significado físico no es elemental en la ecuación (A.4), varía sobre la imagen. A pesar de ello puede considerarse constante cuando el campo de vista es suficientemente pequeño. El campo de vista de un dispositivo describe el cono de las direcciones de vista del mismo, es decir, abarca todas las direcciones a partir de la cual los rayos de luz alcanzan el plano de la imagen pasando por el centro de proyección de la lente (tal y como se expone en el Capítulo 11 sobre geometría de las cámaras).

Concretando lo expuesto hasta el momento, lo importante es saber que lo que medimos realmente es la intensidad I de la imagen y que es proporcional a la reflectancia L de la escena.

Hasta ahora se ha estudiado la relación entre la escena y su imagen formada en el plano de la imagen. Esta imagen no obstante no es tratable desde el punto de vista de la visión por computador, por lo que debe ser transformada. Es preciso convertir la imagen óptica en imagen eléctrica.

En la discusión de radiometría expuesta anteriormente, no tuvimos en cuenta la longitud de onda de la luz incidente porque la relación entre la reflectancia de la escena y la iluminación de la imagen es independiente de esta longitud de onda. Ahora no solamente vamos a considerar la composición espectral de la iluminación, es decir la composición de la iluminación de la imagen como una función de la longitud de onda λ sino también la posible dependencia de la iluminación de la imagen con el tiempo t . Tomemos ahora la iluminación por $E(x, y, t, \lambda)$ donde (x, y) son las coordenadas de posición de los puntos en el plano de la imagen. La “imagen eléctrica” o señal eléctrica $I_E(x, y)$ en cualquier instante de tiempo $t = t_0$ viene dada por la siguiente expresión,

$$I_E(x, y) = \iint i(x, y, t, \lambda) s(\lambda) \tau(t - t_0) d\lambda dt \quad (\text{A.5})$$

donde $s(\lambda)$ es la sensibilidad espectral del dispositivo de captura de imágenes, y $\tau(t)$ es la ventana temporal del dispositivo posicionada en t_0 . Las cámaras de color poseen tres funciones de sensibilidad espectral, correspondientes al rojo, verde y azul.

Conceptualmente, lo que tenemos ahora es una imagen eléctrica capturada en $t = t_0$ y que es definida para una variación continua de las coordenadas de la imagen (x, y) .

La caracterización de la luz es vital para la ciencia del color. Si la luz es acromática (ausencia de color), su único atributo es la *intensidad*. La luz acromática es lo que se observa en un monitor blanco y negro. El término *nivel de gris* hace referencia a una medida escalar de la intensidad que varía de negro a blanco pasando por los diferentes grises. La luz cromática se sitúa aproximadamente entre los 400 y 700 nm del espectro de energía electromagnética. La calidad de una fuente de luz cromática se describe mediante la *reflectancia* y la *iluminación*. Por ejemplo, la luz emitida por una fuente operando en el infrarrojo podría tener una iluminación significativa pero sin embargo tendría una reflectancia prácticamente nula al no ser percibida por el observador.

A.2 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE REFLECTANCIA BIDIRECCIONAL

La cuestión que se plantea ahora es: ¿qué determina la reflectancia de la escena? La reflectancia de la escena depende de la cantidad de luz que incide sobre la superficie y la fracción de esa luz incidente que se refleja en todas direcciones, que se conoce como el *albedo* de la superficie y que depende del material de la superficie. También depende, no obstante, de la geometría de la reflexión de la luz, como muestra claramente el ejemplo de un espejo. Esto es, la reflectancia de una superficie dependerá generalmente de la dirección a partir de la cual es observada así como de la dirección a partir de la cual es iluminada.

Se pueden describir esas direcciones en términos de un sistema de coordenadas local saliente de la superficie, tal y como muestra la figura A.3. Consideremos una perpendicular a la superficie, concretamente su normal \mathbf{n} y una línea de referencia arbitraria sobre la superficie. Las direcciones pueden describirse especificando el ángulo θ entre un rayo y la normal y el ángulo ϕ entre una proyección perpendicular del rayo en la superficie y la línea de referencia en la superficie.

Esos ángulos se denominan *ángulo polar* θ y *ángulo azimutal* ϕ , para comprender mejor esta representación podríamos hablar de latitud y longitud, siendo la línea de referencia el meridiano correspondiente. Esto permite especificar la dirección (θ, ϕ) a partir de la cual la luz incide sobre la superficie y la dirección (θ_e, ϕ_e) en la cual es emitida hacia el observador, en realidad la dirección de proyección hacia la cámara, ver figura A.4.

El brillo de la superficie en un punto está determinado por los rayos emitidos por la superficie hacia la cámara u observador y está gobernado por el valor de esos tres ángulos en el punto, o lo que es lo mismo por los cuatro valores $\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e$.

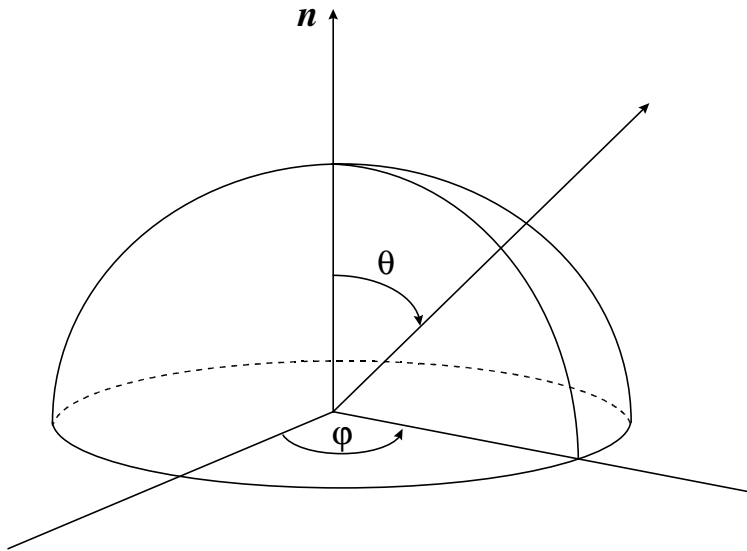


Figura A.3 Representación de un vector en un sistema local de coordenadas mediante el ángulo polar θ y el azimut φ

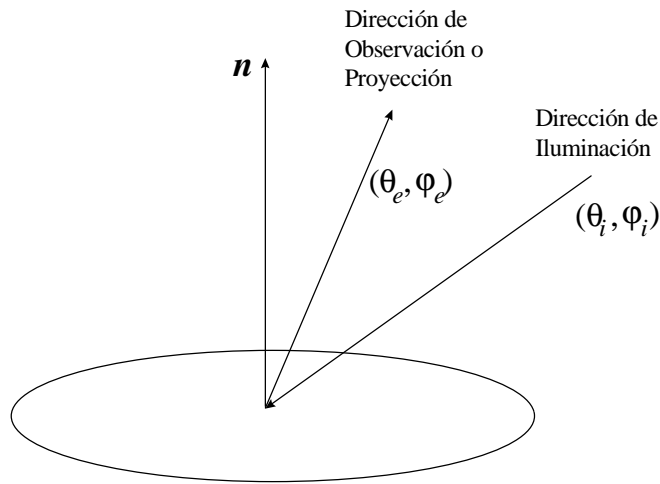


Figura A.4. Ángulos de iluminación (θ_i, φ_i) y observación o proyección (θ_e, φ_e)

Se puede definir la *función de distribución de reflectancia bidireccional* (FDRB) $f(\theta_i, \varphi_i; \theta_e, \varphi_e)$, que nos dice cómo aparece el brillo de una superficie cuando se observa desde una dirección mientras la luz procede de otra. Sea $\delta E(\theta_i, \varphi_i)$ la cantidad de luz que incide en la superficie (iluminación) a partir de la dirección (θ_i, φ_i) y sea

$\delta L(\theta_e, \varphi_e)$ el brillo de la superficie (reflectancia) tal y como se aprecia desde la dirección (θ_e, φ_e) . La FDRB es la razón de la reflectancia a la iluminación,

$$f(\theta_i, \varphi_i; \theta_e, \varphi_e) = \frac{\delta L(\theta_e, \varphi_e)}{\delta E(\theta_i, \varphi_i)} \quad (\text{A.6})$$

Un poco más tarde se estudian varios ejemplos específicos para ciertas superficies ideales.

Una función de cuatro variables como la dada en (A.6) resulta demasiado engorrosa para ser utilizada directamente en la determinación de la relación entre el brillo de la imagen y la forma de las superficies, tal y como se requiere en el Capítulo 16.

Afortunadamente, para muchas superficies ocurre que su reflectancia no cambia si la superficie se rota sobre su perpendicular \mathbf{n} . Esto significa que para una disposición determinada de iluminación y observación en un punto dado, la reflectancia de la superficie permanece invariable en ese punto aunque la superficie sea rotada sobre su perpendicular en dicho punto. En este caso, la FDRB depende sólo de la diferencia $\varphi_e - \varphi_i$ y no de φ_e y φ_i de forma separada, lo cual es realmente cierto para superficies mates y superficies especulares.

A.3 FUENTES DE LUZ EXTENDIDAS

Hasta ahora hemos considerado el caso en el que las fuentes de luz proceden de una única dirección. En la práctica, puede haber varias fuentes de luz o incluso fuentes de luz extendidas, tal como el cielo. En este caso, consideremos un elemento infinitesimal de cielo, de dimensión $\delta\theta_i$ en el ángulo polar y $\delta\varphi_i$ en el azimut, ver figura A.5.

El elemento infinitesimal anterior genera un ángulo sólido,

$$\delta\omega = \text{sen } \theta_i \delta\theta_i \delta\varphi_i \quad (\text{A.7})$$

Si $E(\theta_i, \varphi_i)$ es la iluminación por unidad de ángulo sólido procedente de la dirección (θ_i, φ_i) entonces la iluminación de dicho elemento es

$$E(\theta_i, \varphi_i) \text{sen } \theta_i \delta\theta_i \delta\varphi_i \quad (\text{A.8})$$

y la iluminación total de la superficie es

$$E_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} E(\theta_i, \varphi_i) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\varphi_i \quad (\text{A.9})$$

donde el $\cos \theta_i$ tiene en cuenta la inclinación o escorizado de la superficie tal y como se ve desde la dirección (θ_i, φ_i) .

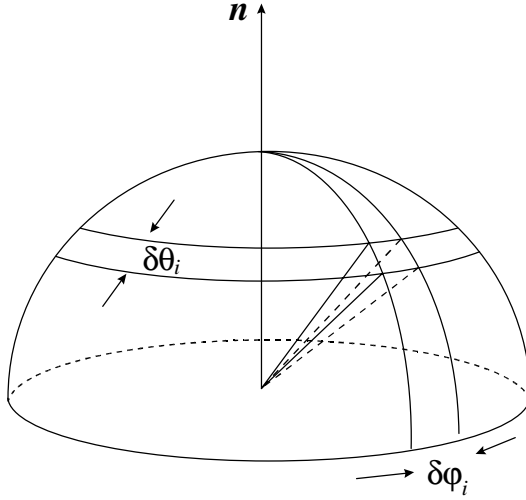


Figura A.5 En el caso de una fuente de luz extendida, se debe integrar el producto de la FDRB y la iluminación sobre todas las direcciones de incidencia

Para obtener la reflectancia de la superficie se debe integrar el producto de la FDRB y la iluminación sobre la parte de la esfera de todas las posibles direcciones de iluminación a partir de las cuales la luz incide en la superficie. Por tanto,

$$L(\theta_e, \varphi_e) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta_i, \varphi_i; \theta_e, \varphi_e) E(\theta_i, \varphi_i) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\varphi_i \quad (\text{A.10})$$

De nuevo, el $\cos \theta_i$ en el integrando tiene en cuenta el escorizado de la superficie. El resultado es una función de dos variables solamente θ_e y φ_e que especifican la dirección del rayo emitido hacia el observador.

A.4 PROPIEDADES DE REFLECTANCIA DE LAS SUPERFICIES

Una superficie *ideal Lambertiana* es una superficie que aparece igualmente brillante desde todas las direcciones de observación y refleja toda la luz incidente sin absorber nada. A partir de esta consideración se puede deducir que la FDRB debe ser

constante para dicha superficie. Para obtener dicha constante, debemos integrar la reflectancia de la superficie sobre todas las direcciones e igualar la reflectancia total obtenida a la iluminación total:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} f E \cos \theta_i \sin \theta_e \cos \theta_e d\theta_e d\varphi_e = E \cos \theta_i \quad (\text{A.11})$$

o bien

$$2\pi f \int_0^{\pi/2} \sin \theta_e \cos \theta_e d\theta_e = 1 \quad (\text{A.12})$$

Utilizando la identidad $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, obtenemos $\pi f = 1$, por tanto, para una superficie ideal Lambertiana,

$$f(\theta_i, \varphi_i; \theta_e, \varphi_e) = \frac{1}{\pi} \quad (\text{A.13})$$

Obsérvese, que puesto que la FDRB es constante para una superficie Lambertiana, se puede obtener la reflectancia L a partir de la iluminación E_0 utilizando,

$$L = \frac{1}{\pi} E_0 \quad (\text{A.14})$$

Este método simple no se puede usar, por supuesto, para superficies con otras propiedades de reflectancia.

El otro extremo de propiedades de reflectancia de superficies se ilustra mediante un reflector especular ideal, que refleja toda la luz procedente de la dirección (θ_i, φ_i) en la dirección $(\theta_i, \varphi_i + \pi)$, ver figura A.6.

La FDRB en este caso es proporcional al producto de dos impulsos, $\delta(\theta_e - \theta_i)$ y $\delta(\varphi_e - \varphi_i - \pi)$. ¿Pero, cuál es el factor de proporcionalidad k ? De nuevo integramos sobre todas las direcciones de emisión para obtener la reflectancia total de la superficie e igualamos esto a la iluminación:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} k \delta(\theta_e - \theta_i) \delta(\varphi_e - \varphi_i - \pi) \sin \theta_e \cos \theta_e d\theta_e d\varphi_e = 1 \quad (\text{A.15})$$

o bien

$$k \sin \theta_i \cos \theta_i = 1 \quad (\text{A.16})$$

Entonces, en este caso,

$$f(\theta_i, \varphi_i; \theta_e, \varphi_e) = \frac{\delta(\theta_e - \theta_i) \delta(\varphi_e - \varphi_i - \pi)}{\sin \theta_i \cos \theta_i} \quad (\text{A.17})$$

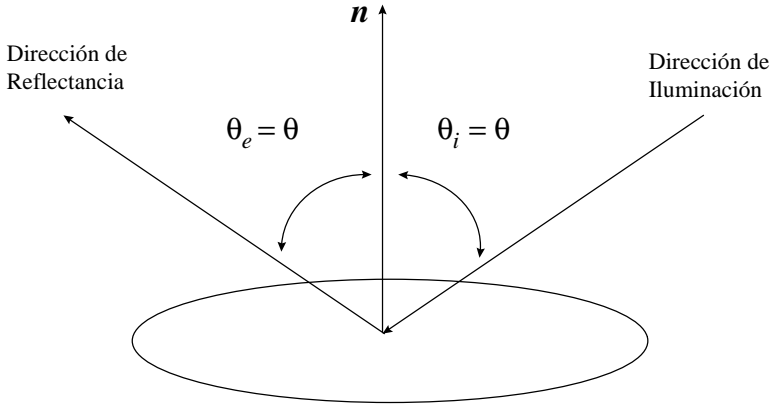


Figura A.6. Una superficie especular refleja toda la luz incidente en una dirección que cae en el mismo plano que el rayo incidente y la perpendicular \mathbf{n} . El ángulo de emisión θ_e entre el rayo reflejado y la normal es igual al ángulo incidente θ_i entre el rayo incidente y la normal

Se puede ahora utilizar este resultado para determinar la reflectancia de una superficie especular bajo una fuente de luz extendida,

$$\begin{aligned} L(\theta_e, \varphi_e) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\delta(\theta_e - \theta_i) \delta(\varphi_e - \varphi_i - \pi)}{\sin \theta_i \cos \theta_i} E(\theta_i, \varphi_i) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\varphi_i \\ &= E(\theta_e, \varphi_e - \pi) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

La reflectancia es justamente igual a la iluminación reflejada. Esta relación no se cumple para otro tipo de superficies con otras propiedades de reflectancia.

La FDRB puede determinarse experimentalmente iluminando una muestra plana del material de interés con una lámpara montada sobre un goniómetro y midiendo su reflectancia mediante un sensor montado sobre otro goniómetro. Un goniómetro tiene dos ejes de rotación, de modo que un dispositivo montado sobre él puede dirigirse en una dirección conocida. La determinación experimental de la FDRB es muy tediosa debido a las cuatro variables involucradas. Afortunadamente, sólo tres (θ_i , θ_e y $\varphi_e - \varphi_i$) son realmente de interés.

Otro método para obtener la FDRB consiste en modelar cómo se refleja la luz procedente de una superficie y encontrar las correspondientes propiedades de reflectancia de forma analítica o mediante simulación numérica.

A.5 BRILLO DE LAS SUPERFICIES

¿Cómo brillará una superficie Lambertiana cuando se ilumina mediante una fuente de luz puntual con iluminación E ? La iluminación de una fuente puntual localizada en la dirección (θ_s, φ_s) es,

$$E(\theta_i, \varphi_i) = E \frac{\delta(\theta_i - \theta_s) \delta(\varphi_i - \varphi_s)}{\sin \theta_s} \quad (\text{A.19})$$

donde el término del seno asegura que la integral de esta expresión es exactamente E . Esto es, debemos tener,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} E(\theta_i, \varphi_i) \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_i = E \quad (\text{A.20})$$

Utilizando la FDRB para una superficie Lambertiana obtenida en la ecuación (A.13) y considerando la ecuación (A.10), es fácil demostrar que en este caso,

$$L = \frac{1}{\pi} E \cos \theta_i \quad \text{para } \theta_i \geq 0 \quad (\text{A.21})$$

Ésta es la ley de la reflectancia de Lambert o ley del coseno a partir de superficies mates. Obsérvese que la dependencia del coseno del ángulo incidente procede directamente de la dependencia de la reflectancia de ese factor según la ecuación (A.10).

Consideremos ahora la misma superficie bajo una iluminación E uniforme, dicha iluminación procede de una distribución uniforme de fuentes de luz semejante a la bóveda celeste. En este caso,

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{E}{\pi} \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\varphi_i = E \quad (\text{A.22})$$